

Exercice 1:

1. Énoncé: $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

On a $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ (car $\sin(x) = \sin(\pi - x)$)

$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ (car $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$)

$\sin\left(\frac{101\pi}{5}\right) = \sin\left(20\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(2 \times 10 \times \pi + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2. a) dans \mathbb{R}

On a $\sin(x) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ équivaut à $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

équivaut à $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

donc l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} est $S = \left\{ \frac{\pi}{5} + 2k\pi ; \frac{4\pi}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

dans l'intervalle $[0; 2\pi]$

$0 \leq \frac{\pi}{5} + 2k\pi \leq 2\pi$

$0 \leq \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \leq 2\pi$

$0 \leq \frac{1}{5} + 2k \leq 2$

$0 \leq \frac{4}{5} + 2k \leq 2$

$-\frac{1}{5} \leq 2k \leq 2 - \frac{1}{5}$

$-\frac{4}{5} \leq 2k \leq 2 - \frac{4}{5}$

$-\frac{1}{10} \leq k \leq \frac{9}{10}$

$-\frac{4}{10} \leq k \leq \frac{6}{10}$

Donc $k = 0$ d'où $x = \frac{\pi}{5}$

Donc $k = 0$ d'où $x = \frac{4\pi}{5}$

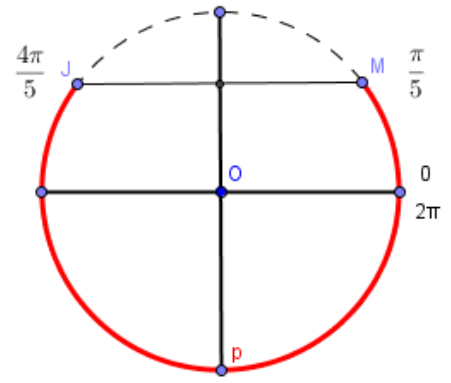
donc l'ensemble des solutions dans $[0; 2\pi]$ est $S = \left\{ \frac{\pi}{5}; \frac{4\pi}{5} \right\}$

b) L'ensemble des solutions l'inéquation $\sin(x) < \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

dans l'intervalle $[0; 2\pi]$

$$\text{est } S = \left[0; \frac{\pi}{5} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{5}; 2\pi \right]$$

(on donne $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \approx 0,6$)



Exercice 2:

On considère la figure suivante

$$\text{on donne } (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{2\pi}{5} [2\pi]$$

D'après la relation de Chasles on a

$$(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{-\pi}{3} + \frac{-2\pi}{5} + \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{-37\pi}{30} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{-37\pi}{30} + 2\pi [2\pi]$$

$$\equiv \frac{23\pi}{30} [2\pi]$$

puisque $\frac{23\pi}{30} \in]-\pi; \pi]$

donc $\frac{23\pi}{30}$ est la mesure principale de $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB})$

